

# 轉動慣量測量及角動量守恆實驗

## 一、目的：

測量不同形狀之物體繞特定對稱軸作旋轉運動時的轉動慣量，及驗證角動量守恆定律。

實驗內容包括：

- [A]質點式剛體轉動慣量
- [B]圓盤與圓環的轉動慣量
- [C]圓盤的偏離軸心轉動慣量
- [D]角動量守恆

## 二、原理：

### (1)轉動運動和平移運動的比較

當物體的運動速度遠低於光速時，物體的平移運動滿足牛頓第二定律的運動方程式

$$F = ma \quad (1)$$

式中  $m$  為物體的慣性質量(inertia mass)， $F$  為物體所受的淨外力， $a$  為運動加速度。對於轉動運動，物體的運動方程式則須以淨力矩(net torque)  $\tau$ 、轉動體的轉動慣量(moment of inertia)  $I$  和角加速度(angular acceleration)  $\alpha$  分別取代平移運動方程式中的作用力  $F$ 、慣性質量  $m$  和加速度  $a$ ，改寫為下式：

$$\tau = I\alpha \quad (2)$$

設物體轉動的角度隨時間的變化為  $\theta(t)$ ，則角速度(angular velocity)  $\omega$  為  $\theta(t)$  對時間的微分，角加速度  $\alpha$  為角速度  $\omega$  對時間的微分。表一列出物體作移動運動和物體對某一固定軸轉動時，其運動方程式及各種動力學方程式的對照比較。

表一 轉動與平移運動的運動方程式和動力學公式對照表比較

	對某一固定軸之轉動	平移運動
動能	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	$K = \frac{1}{2}mv^2$
平衡	$\Sigma \tau = 0$	$\Sigma \mathbf{F} = 0$
牛頓第二定律	$\Sigma \tau = I\alpha$	$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$
牛頓第二定律	$\Sigma \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$
動量	$L = I\omega$	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
保守定理	$L_i = L_f$	$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$
功率	$P = \tau\omega$	$P = Fv$

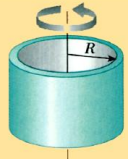
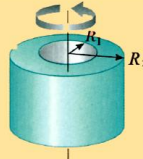
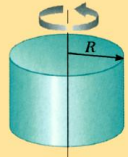
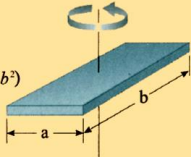
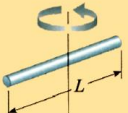
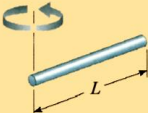
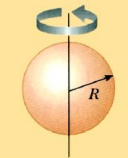
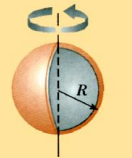
<sup>a</sup> 移動和轉動之方程式均以向量式表示，然而部分之轉動方程式只表成非向量之形式。

## (2)轉動慣量

若不考慮摩擦力和空氣阻力等因素，物體平移運動的難易和運動體的形狀和運動方向無關，僅取決於運動體的質量。但轉動運動則複雜多了，決定物體轉動的難易，不僅取決於物體的質量，也取決於物體繞轉軸的位置和方向，通常以轉動慣量(rotational inertia)  $I$  作為物體轉動難易的指標。對相同質量的物體，其轉動慣量將依質量分佈、形狀、繞轉的旋轉軸不同，而有不同的數值。對於形狀簡單或具高對稱性的物體，其轉動慣量可經由積分計算得到。具高對稱性的幾種不同幾何形狀的均質剛體(uniform rigid body)繞不同軸旋轉的轉動慣量列於表二中。

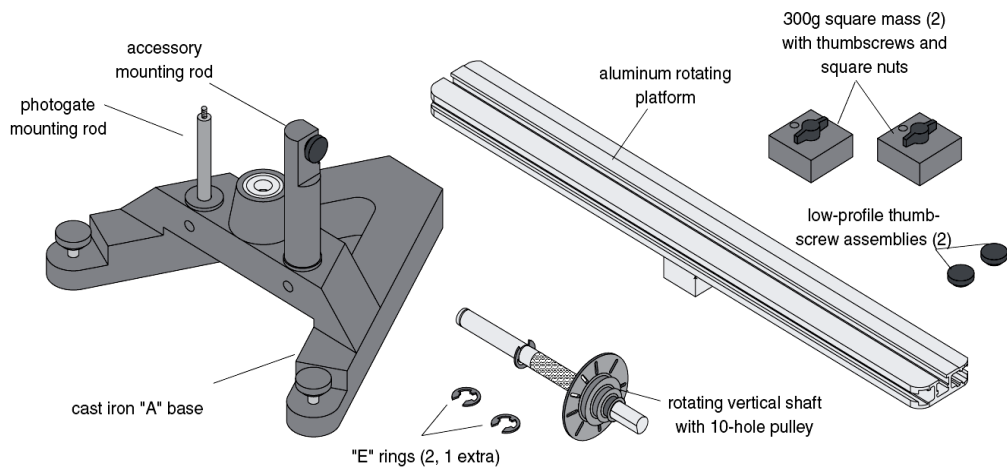
對於對稱性低、形狀複雜、及密度不均勻的物體，則其轉動慣量很難以積分求出，此時就必須透過實驗測量。可使物體作適當的轉動運動，經實驗測量直接獲得物體的轉動慣量。

表二 不同幾何形狀之均質剛體的轉動慣量計算公式

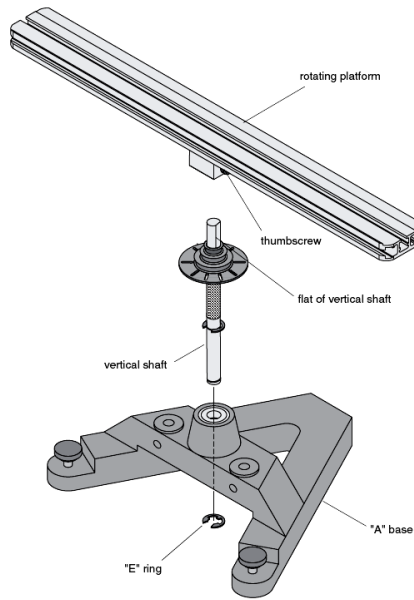
空心薄圓筒 $I_{CM} = MR^2$		中空圓柱 $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$	
空心圓柱 或圓盤 $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$		矩形板 $I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$	
細長棒以 中心為轉軸 $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$		細長棒以一 端為轉軸 $I = \frac{1}{3} ML^2$	
實心球 $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$		薄球殼 $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$	

### 三、實驗器材：所有器材如圖 1 所示

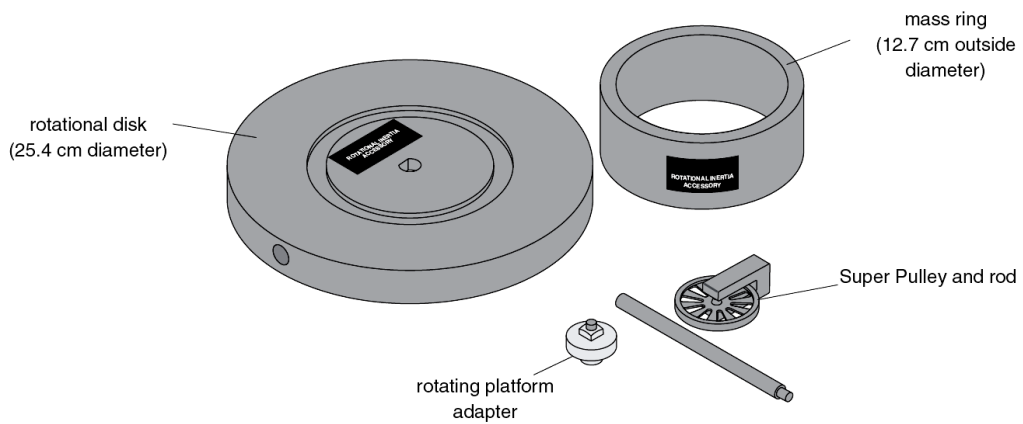
1. 轉動測量基台：組件包含 A-型底座、轉動基台零件、轉動平台(rotating platform)，如圖 1(a)。
2. 轉動慣量配件：如圖 1(c)所示直徑 25.4 cm 的剛體圓盤，外徑 12.7 cm 的剛體圓環、10 軸輻滑輪組和轉動平台連接固定器(rotating platform adapter)
3. 光電閘：見圖 1(d)
4. Arduino box01：見圖 1(e)



(a) 轉動基台所有組件



(b) 轉動基台組裝示意圖



(c) 剛體圓盤與圓環待測物，及滑輪組件



(d) 光電閘



(e) Arduino box01

圖 1 轉動基台(a)組件，(b)組裝示意圖，(c)剛體圓盤與圓環待測物及滑輪組件，(d)光電閘，(e)Arduino box01。

#### 四、儀器介紹和組裝

##### 1. 轉動基台組裝：

依圖 1(b)所示將圖 1(a)之組件組裝。

- (1) 先將支撐桿插入 A 型底座(“A” base)，在支撐桿底部套入“C”型環，使之固定。
- (2) 如圖 1(b)所示，將轉動長直平台下方的固定孔插進支撐桿上端，注意有形狀限制。支撐桿呈 D 型。

2. 轉動基台底座的水平調整：轉動平台需處於水平狀態，如果不水平，會影響實驗結果的準確度。請按下列步驟調整水平：

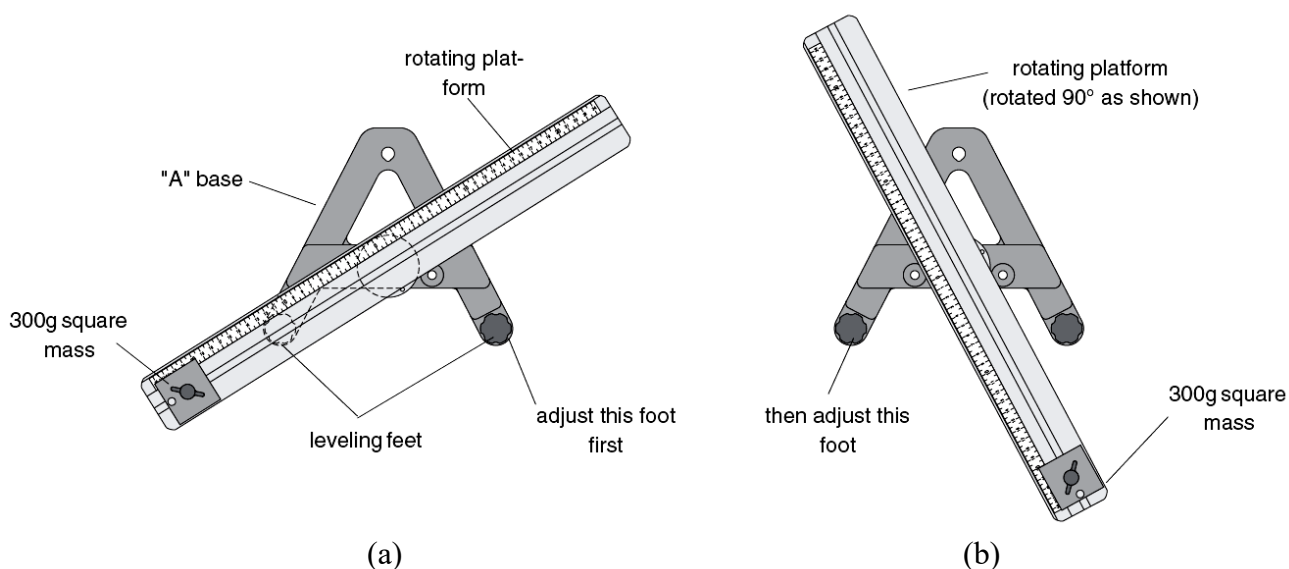


圖 2 轉動平台底座水平調整步驟示意圖。

- (1) 如圖 2 所示，將重約 300 克的方形重物(300 g square mass)放在軌道的任何一邊，以所附螺絲將之拴緊於轉動平台上。如果有裝向心力裝置，則裝置在同一邊。
- (2) 調整底座一腳的螺絲，直到如圖 2(a)所示，軌道平台對準另一腳的螺絲。
- (3) 然後，如圖 2(b)所示將軌道旋轉 90 度，會與 A 型底座的一邊成平行，再調整底座的另

一個腳螺絲，直到軌道能夠平穩的停留在這個位置。

- (4) 若確實達到水平，則在不受外力作用下，轉動平台不論處於哪一方位都會靜止，不會發生轉動。

### 3. 安裝 10 輪輻智慧滑輪及光電閘：兩配件的安裝位置和方式如圖 3 所示

#### (1) 使用光電閘

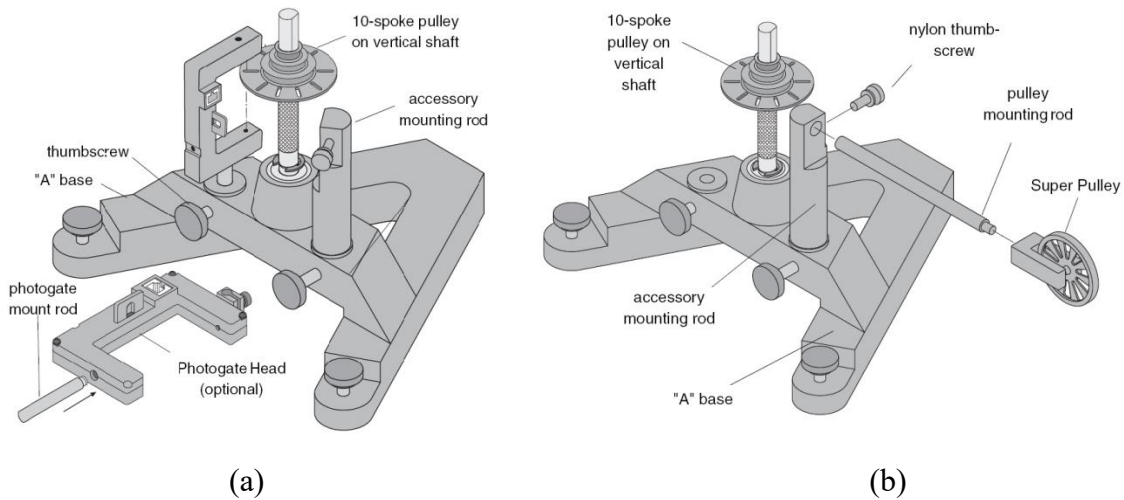


圖 3 智慧滑輪及光電閘的安裝示意圖

- (1) 將支撐桿(photogate mount rod)插入底座靠近轉動桿的孔上。
- (2) 鬆開底座的螺絲，讓支撐桿可以轉動，調整支撐桿與光電閘的方向，讓紅外線光束可以通過智慧滑輪的孔洞。如果光電閘是用電腦驅動，可以利用觀察光電閘末端的 LED 指示燈來得知。光電閘頭勿接觸滑輪。當光電閘頭在正確的位置時，拴緊底部的螺絲固定支撐桿。如圖 3(a)。

#### 5. 使用滑輪與支撐桿

- (1) 將滑輪水平架設。將滑輪的支撐桿插入黑色支撐桿的孔洞上旋緊於支撐桿上，並拴緊螺絲。如圖 3(b)。
- (2) 調整黑色支撐桿位置，讓從中心轉軸的線能夠對齊滑輪上的溝槽，調整 A 型底座位置，讓線能通過滑輪並不碰觸桌子邊緣。

#### 6. 轉動剛體組裝：

- (1) 待測的轉動剛體可以直接鎖定在轉動基座上方測量。
- (2) 也可如圖 4 所示，將待測之轉動剛體利用轉動平台連接固定器(rotating platform adapter)鎖定於轉動平台上操作。平台轉接器組裝過程：將方形螺帽(square nut)接到平台轉接器平台上，如圖 4，將平台連接固定器移至在待測剛體擬置放的位置，拴緊連接固定器，以固定轉體。
- (3) 圓盤可透過盤上四個不同位置的 D 形孔("D" holes)，選擇圓盤的轉動軸和轉動方式。
  - (a) 在盤面中心處的 D 形孔：如圖 4 中的左圖所示。固定此孔，使圓盤繞圓盤外的某一轉軸轉動時，圓盤不會自轉。
  - (b) 位在另一盤面設有軸承的 D 形孔：如圖 4 中的右圖所示。可使圓盤繞圓盤外的某一轉軸作公轉時，圓盤能夠繞經過圓盤面中心之垂直軸作幾近無磨擦阻力的自旋轉。

動。

(c) 位於盤之邊緣上的兩個 D 形孔：兩孔相距 180 度，固定此 D 形孔，則轉動軸為通過此孔的直徑軸。

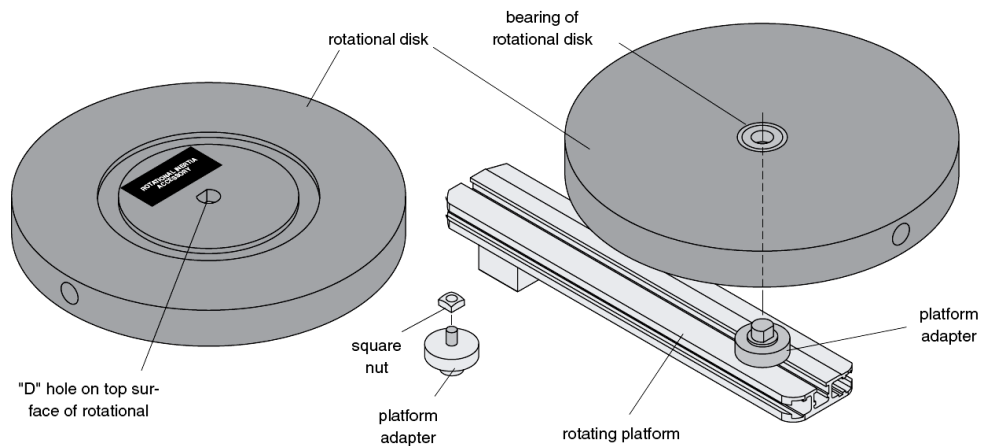


圖 4 圓盤轉體上四個 D 形孔洞位置和轉體組裝於轉動平台上的示意圖。

## 7. 轉動慣量測量原理

以圓盤為例說明轉動慣量測量原理，實驗裝置如圖 5 所示。為找出轉動慣量，在物體上施加一個已知的力矩，量測物體的角加速度 $\alpha$ ，因為  $\tau = I\alpha$ ，就可以得到轉動慣量。其中 $\tau$ 是由懸掛物（砝碼）繞著裝置底座所產生的力矩， $a$ 為懸掛重物的加速度。因為

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{T} \quad (3)$$

其中  $r$  等於纏線物體的半徑， $T$  為物體轉動時線的張力。按牛頓第二運動定律可得

$$\Sigma F = mg - T = ma \quad (4)$$

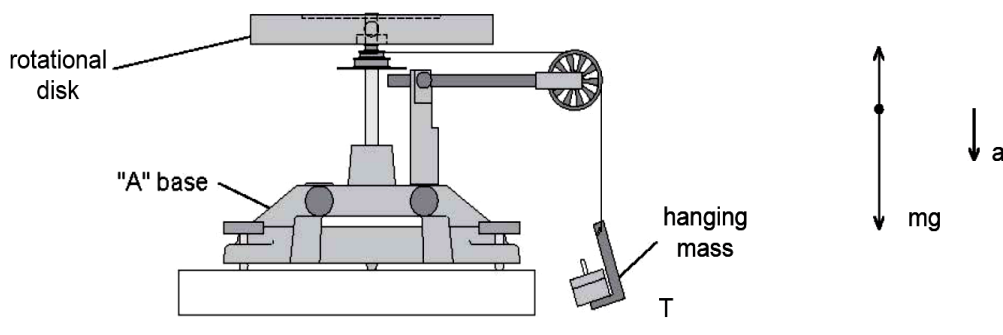


圖 5 圓盤為例的實驗裝置圖。

所以線的張力  $T$  為：

$$T = m(g - a) \quad (5)$$

一旦知道懸掛物體  $m$  的線性加速度  $a$ ，就可以得到力矩 $\tau$ 及角加速度 $\alpha$ （角加速度等於 $a/r$ ）。轉動慣量計算公式如下：

$$I = \frac{mr^2(g-a)}{a} \quad (6)$$



本實驗利用 Arduino 讀取智慧滑輪的轉速，亦即旋轉體的角速度  $\omega$ ，使用 EXCEL 做圖，線性擬合求出角加速度  $\alpha$ ，則

$$I = \frac{mr(g-r\alpha)}{\alpha} \quad (7)$$

## 8. 摩擦力的修正

有幾個不同的方法可以找出摩擦力對實驗的影響，分別說明如下：

- (1) 取適當的懸掛質量(約 5-15 公克之間)，讓滑輪可以克服動摩擦力等速度落下。設該質量為  $m_f$ ，則只要把公式(6)或(7)中的  $m$  以  $m-m_f$  取代就可以求得轉動慣量。
- (2) 不加懸掛質量，讓旋轉物體轉動（注意：轉動方向與加上懸掛質量相同），測量角加速度  $\alpha_f$ ，將公式中的  $\alpha$  以  $\alpha + |\alpha_f|$  取代  $\alpha$  就可以求得轉動慣量。
- (3) 如果繫懸掛質量的線不會碰觸地面，當旋轉質量降到最低點後，由於旋轉物體的慣性會將旋轉質量往上拉，將旋轉質量下降及上升過程的角加速度求出，計算兩者絕對值的平均值，代入公式(7)就可以求得轉動慣量。

在這裡必須強調如同滑車在軌道上的運動，當滑車質量改變，其摩擦力跟著改變。每次改變旋轉體，都需要重新測量摩擦力的大小或影響。

## [A]質點式剛體的轉動慣量

質量為  $M$  的物體繞著距其質心距離為  $R$  的某特定軸旋轉，若物體三個維度的尺寸都遠小於旋轉半徑  $R$ ，則可將之視為體積可忽略的質點。則該質點對此旋轉軸的轉動慣量為

$$I = MR^2$$

式中  $M$  為質量， $R$  為轉軸到物體質心的距離。

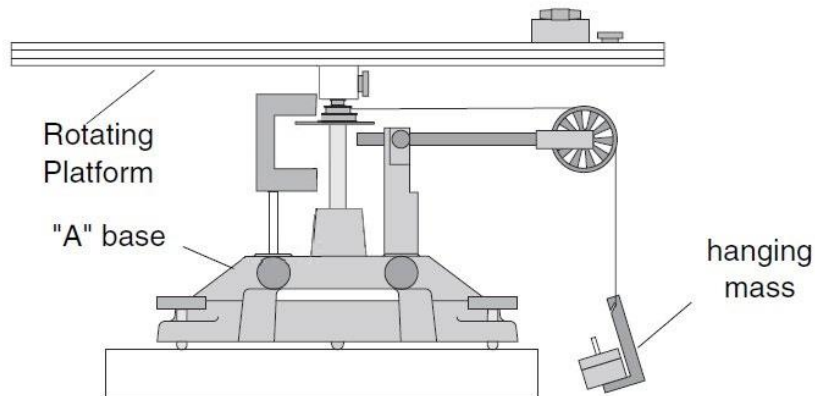


圖 6 質點式剛體的實驗示意圖

### 實驗步驟：

1. 將方塊剛體鎖定在轉動平台上的任一位置，如圖 6。
2. 將智慧滑輪架設在底座，連結至 Arduino 盒。
3. 估算理論值的轉動慣量：秤量方塊剛體的質量  $M$  及量測旋轉軸到方塊中心的距離  $R$ ，理論估算物體的轉動慣量。
4. 掛一個約 50 克的物體在滑輪上，纏繞繩子至上方並讓物體可以由桌子邊掉落至地板，做旋轉角速度與時間的關係圖，由斜率得出角加速度。
5. 實驗求出摩擦力的修正，計算轉動慣量。
6. 將點質量從轉動平台上拿開，找出轉動平台的角加速度以及轉動慣量，然後再由全部的轉動慣量減去，以得到點質量的轉動慣量。
7. 改變方塊位置，重複實驗步驟 4-6。
8. 比較理論值與計算值，討論之間的差異。



### [B]圓盤與圓環的轉動慣量

一個均質圓環（如圖二所示）繞中心軸的轉動慣量為

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2) \quad (8)$$

其中  $M$  是環的質量， $R_1$  為內徑半徑， $R_2$  為外徑半徑。

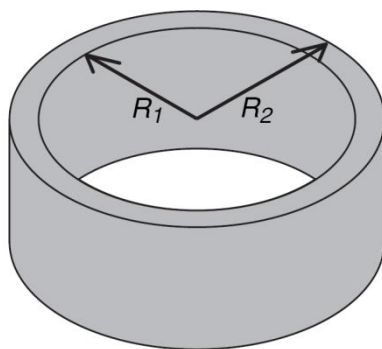


圖 7 圓環。

一個圓盤對中心軸的轉動慣量為：

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \quad (9)$$

其中  $R$  為圓盤半徑。

實驗步驟：

1. 直接將圓盤裝在中心軸上，圓盤的凹槽面要朝上。
2. 將圓環放在圓盤的凹槽上，如圖 8-1。
3. 將智慧滑輪裝在底座並連結至 Arduino 盒。
4. 測圓盤與圓環的質量。
5. 測圓環的內徑與外徑，計算半徑  $R_1, R_2$ 。測圓盤的直徑並計算圓盤的半徑  $R$ 。
6. 計算圓環和圓盤的轉動慣量。
7. 掛一個約 50 克的物體在滑輪上，纏繞繩子至上方並讓物體可以由桌子邊掉落至地板，做旋轉角速度與時間的關係圖，由斜率得出角加速度。
8. 實驗求出摩擦力的修正，計算圓盤加圓環的轉動慣量。
9. 將圓環從圓盤上移開，如圖 8-2，重複步驟 7-8，計算圓盤的轉動慣量。
10. 用全部的轉動慣量減去圓盤的轉動慣量即可得圓環的轉動慣量。
11. 將盤從軸上移開並轉動使其直立。透過盤旁邊的兩個 D 型孔，將盤直立插入到轉軸上，如圖 9，以同樣方法測得直立圓盤的的轉動慣量。

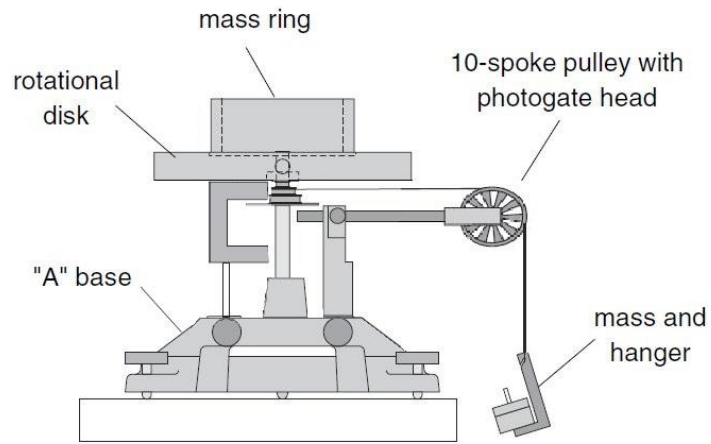


圖 8-1 盤加環的實驗示意圖。

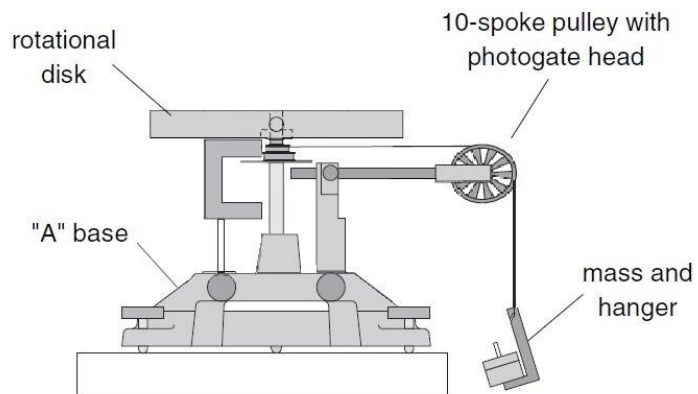


圖 8-2 盤的實驗示意圖。

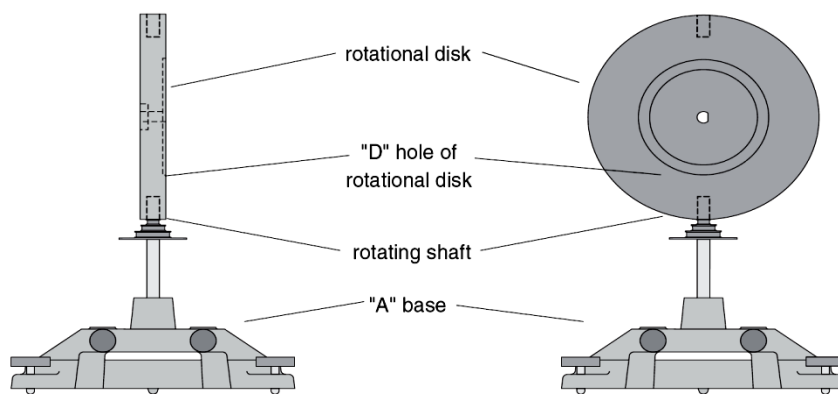


圖 9 直立圓盤的實驗示意圖

### [C]圓盤的偏離軸心轉動慣量

理論上，一個圓盤的垂直軸心通過質心的轉動慣量為：

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (10)$$

其中  $M$  為圓盤的質量， $R$  為盤的半徑。而軸心平行質心軸的圓盤的轉動慣量為：

$$I = I_{cm} + Md^2 \quad (11)$$

其中  $d$  為兩轉軸的距離。

在本實驗的一部份中，將圓盤的軸承面架設在轉動平台上，圓盤能夠自由的在轉動平台上轉動。所以當轉動平台轉動時，對於質心而言，圓盤是相對不轉動的。因此，其作用就如同一個點質心，而非額外的物體，其轉動慣量會降低，由  $I_{cm} + Md^2$  降低為  $Md^2$ 。

#### 實驗步驟：

1. 如圖 10，將轉動慣量配件架設起來。將盤的軸承面（無凹槽面）朝上，用平台轉接器將盤旋緊在較大的半徑上。

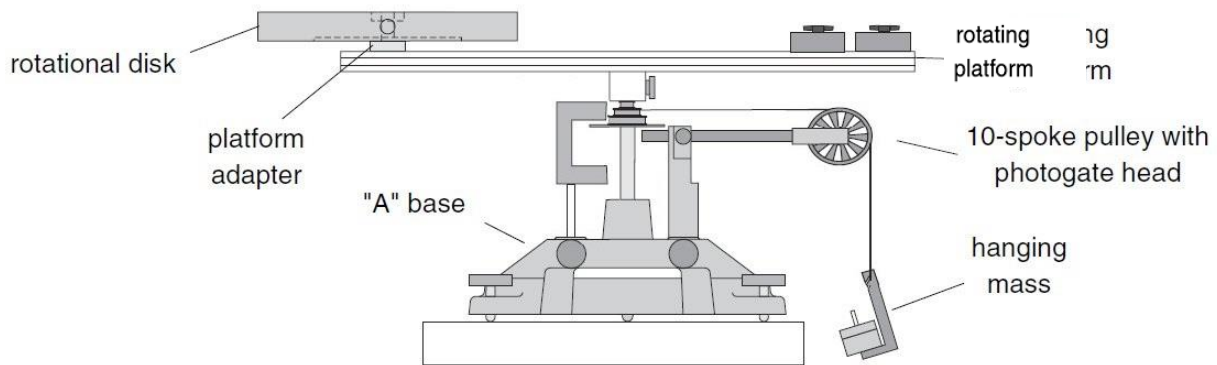


圖 10

2. 將智慧滑輪裝在底座並連結至 Arduino 盒。
3. 將盤的重量  $M$  秤重，量測盤的半徑  $R$ ，量測轉動軸心到盤的質心的距離  $d$ 。
4. 掛一個約 50 克的物體在滑輪上，纏繞繩子至上方並讓物體可以由桌子邊掉落至地板，做旋轉角速度與時間的關係圖，由斜率得出角加速度。
5. 實驗求出摩擦力的修正，計算轉動慣量。
6. 將圓盘面反轉，軸承面朝下，重複步驟 4-5，計算轉動慣量。
7. 將圓盤從轉動平台上拿開，重複步驟 4-5，計算轉動慣量。
8. 由步驟 5-6 得到的轉動慣量，計算偏離軸心固定不動圓盤及自由轉動圓盤的轉動慣量。

### [D]角動量守恆

當一個環掉落在轉動的盤上，整個系統並沒有淨力矩，因此，角動量並沒有改變，角動量  $L$  保持守恆。

$$L = I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad (12)$$

其中  $I_i$  是初始的轉動慣量， $\omega_i$  是初始角速度。盤的初始轉動慣量為：

$$I_i = \frac{1}{2} M_1 R^2 \quad (13)$$

終末時結合盤與環的轉動慣量為：

$$I_i = \frac{1}{2} M_1 R^2 + \frac{1}{2} M_2 (R_1^2 + R_2^2) \quad (14)$$

所以末角速度為：

$$\omega_f = \frac{M_1 R^2}{M_1 R^2 + M_2 (R_1^2 + R_2^2)} \omega_i \quad (11)$$

#### 實驗步驟：

1. 將轉動慣量配件如圖 11 進行組裝，將圓盤有凹槽的哪一面朝上，讓環可以放入。
2. 將智慧滑輪光電閘架在底座的黑色支撐桿上，並調整位置，使其能跨立在中心轉軸的滑輪孔上。在盤的中心正上方握住環，用手轉動盤。讀取角速度之後，放開環使之落在盤上，如圖 12。讀取角速度。
3. 量測盤秤重，量測半徑，以測量得到的初角速度  $\omega_i$ ，求理論末角速度  $\omega_f$ ，再將理論末角速度  $\omega_f$  與實驗量測所得的末角速度  $\omega_f'$ 。

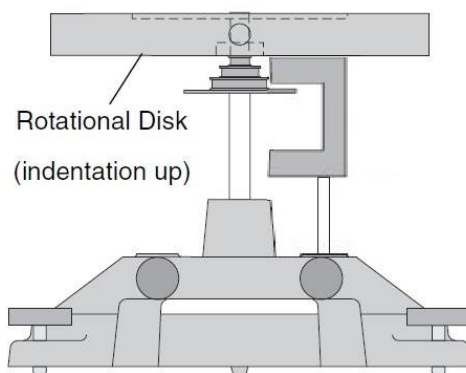


圖 11 起始狀況

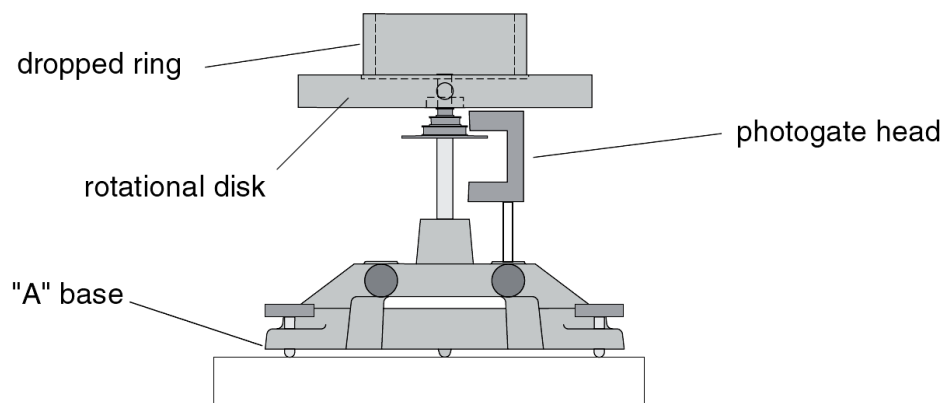


圖 12 終止狀況

**問題：**

1. 為什麼調水平時，要在轉動平台鎖定一方塊剛體？
2. 摩擦力的測量除實驗步驟中的方法，是否有其他方法可以測出摩擦力？
3. 本實驗測量轉動慣量的誤差來源有來些？請討論。
4. 何謂平行軸定理？何謂垂直軸定理？
5. 已知一個圓盤對中心軸的轉動慣量為  $\frac{1}{2}MR^2$ ，試利用垂直軸定理證明，厚度可忽略的圓盤對平行圓盤通過圓心轉軸的轉動慣量為  $\frac{1}{4}MR^2$ 。
6. 承上題，試利用平行軸定理證明，厚度為  $L$  的圓盤對平行圓盤通過質心轉軸的轉動慣量為  $\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ 。
7. 承上題，試估算本實驗的圓盤，考慮厚度與不考慮厚度的轉動慣量差異多少%？